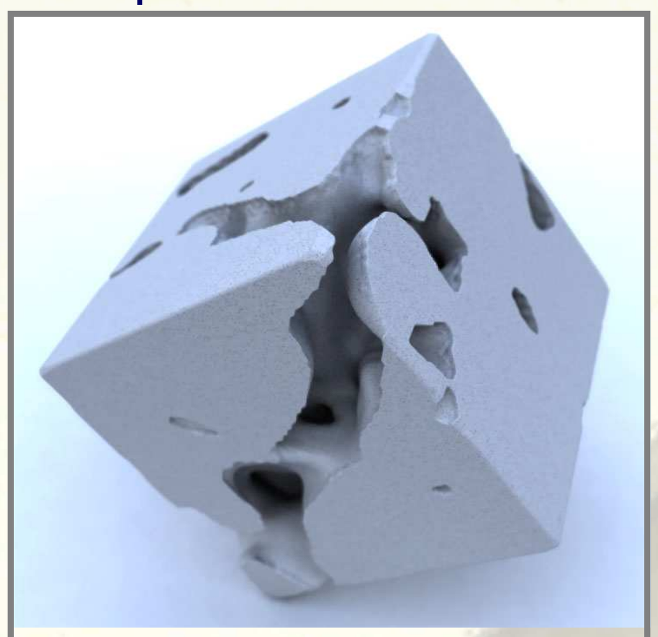
Topologie dans le Tore & Analyse d'images de Matériaux

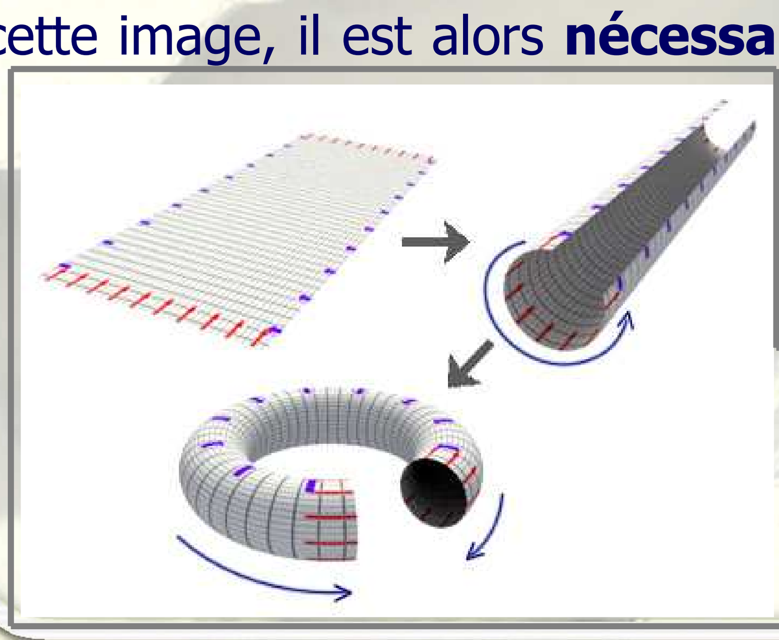
1 Espaces toriques et matériaux

La topologie est utilisée dans différents domaines de l'analyse d'images afin d'étudier la géométrie de certains objets. En analyse de matériaux poreux, différents outils topologiques, tel que le squelette, permettent d'étudier les relations existant entre les propriétés physiques d'un matériau et ses caractéristiques géométriques.



Exemple d'image tridimensionnelle de matériau poreux.

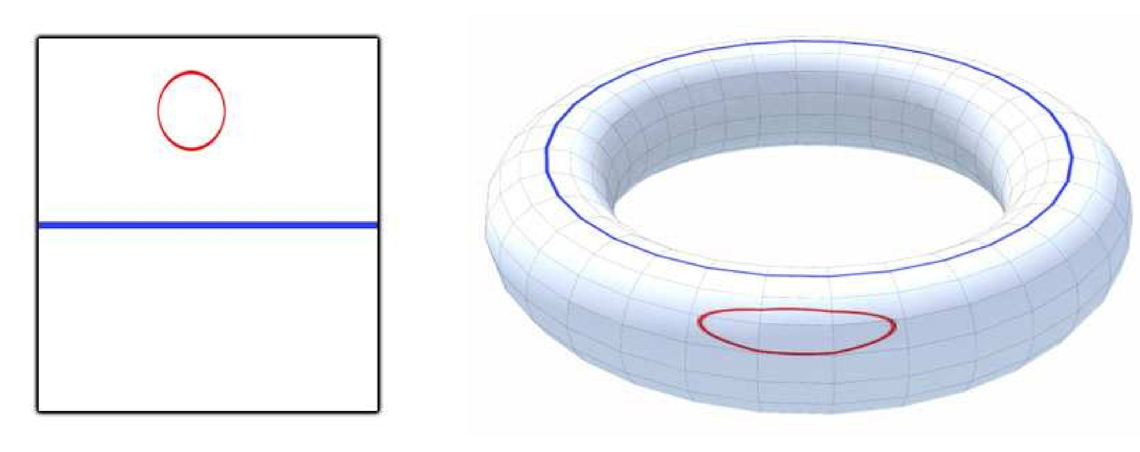
Dans certaines applications, seul un échantillon (sous forme d'image tridimensionnelle) du matériau poreux est étudié ; le matériau entier est alors considéré comme étant un pavage régulier de cet échantillon.
Un tel pavage est simulé en considérant les faces opposées de l'échantillon comme étant reliées deux à deux : l'échantillon est alors plongé dans un **espace torique** tridimensionnel. Pour effectuer des analyses topologiques sur cette image, il est alors **nécessaire d'adapter nos outils aux espaces toriques tridimensionnels**.



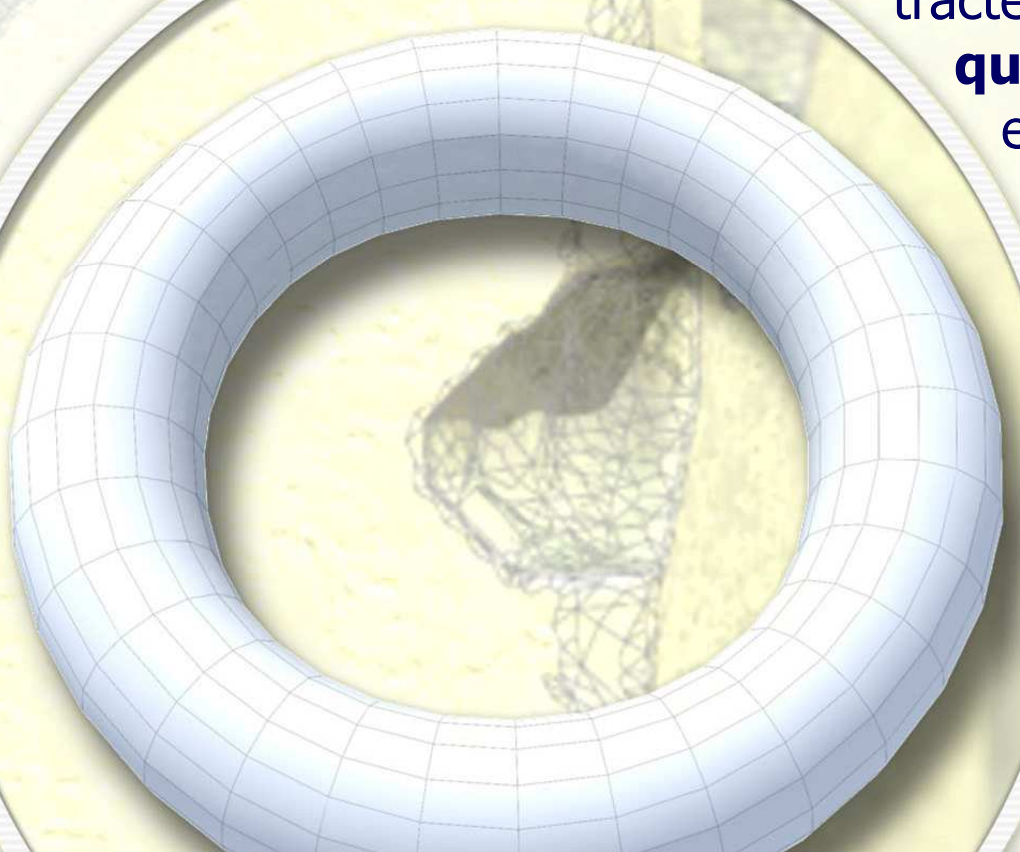
En recollant deux à deux les bords opposés d'une image, on obtient un tore.

2 Grains dans les matériaux

Certaines analyses effectuées sur l'échantillon requièrent que ce dernier soit dépourvu de grains. Dans une image «classique», un **grain** est une composante de l'objet (le matériau) qui ne touche pas les bords de l'image.
Lorsque l'on considère une image plongée dans un espace torique, cette définition n'a plus de sens car l'image ne possède plus de bords (les bords opposés étant reliés deux à deux). Il est donc nécessaire de poser une nouvelle définition des grains, adaptée aux espaces toriques.
Dans un tore, contrairement à l'espace euclidien classique, certains **lacets** (courbes fermées) ne peuvent pas, par déformation continue, être rétractés en un point : nous les appelons **lacets toriques**. Un grain, dans une image plongée dans un espace torique, est une composante de l'objet dont tous les lacets peuvent être déformés, dans l'espace, en un point. Autrement dit, un grain est une composante ne contenant pas de lacet torique.



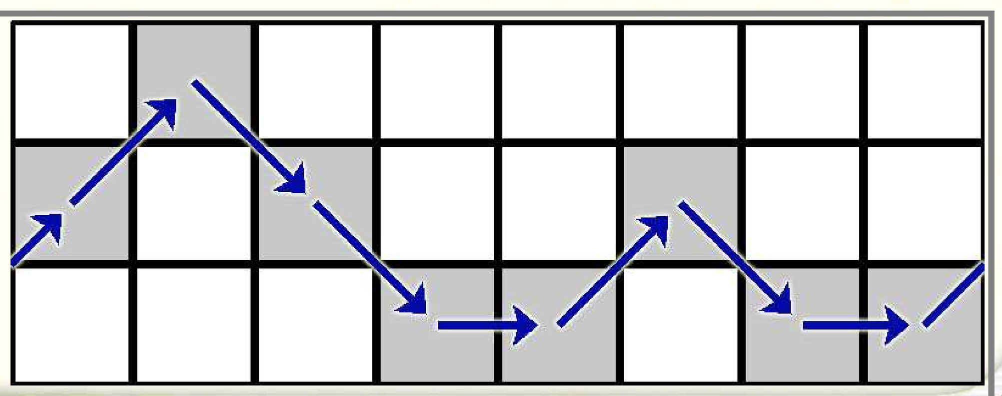
A gauche, une image torique où sont représentés un lacet torique (courbe bleue) et un lacet non torique (courbe rouge).
A droite, la même image projetée sur un tore : le lacet rouge peut être contracté en un point, mais pas le lacet bleu qui fait le tour du tore.



3 Nouvelle caractérisation des lacets toriques

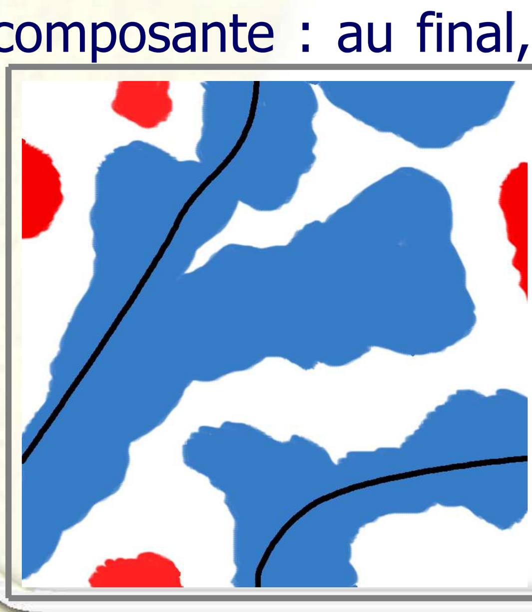
Si deux lacets peuvent déformés de façon continue l'un en l'autre, ils appartiennent à la même classe d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence de lacets d'un espace constitue le **groupe fondamental** de cet espace. Pour savoir si une composante de l'objet n'est pas un grain, il faut donc savoir s'il contient un lacet qui n'appartient pas à la classe d'équivalence du point. Pour ce faire, l'exploration et la déformation de tous les lacets possibles n'est pas une méthode praticable.
Nous avons donc proposé une nouvelle approche pour calculer les lacets toriques. Nous avons d'abord proposé une nouvelle définition des lacets dans les espaces toriques, qui ne sont plus vus comme une suite de points voisins, mais comme une suite de vecteurs. Puis, nous avons proposé une nouvelle définition de l'équivalence de lacets, toujours basée sur les vecteurs. Enfin, nous avons mis en avant une caractéristique simple de chaque lacet, le **vecteur d'enroulement** du lacet, permettant de savoir à quelle classe d'équivalence un lacet appartient.
Pour un lacet donné, il est alors très simple de savoir s'il appartient ou non à la classe d'équivalence du point.

Dans un espace torique, un lacet n'est pas vu comme une suite de points, mais comme une suite de vecteurs.



4 Algorithme de détection des lacets toriques

Grâce au vecteur d'enroulement, nous avons pu mettre en place un **algorithme linéaire**, fonctionnant en dimension quelconque, et **permettant de savoir si une composante du matériau est un grain** (elle ne contient pas de lacet torique) ou non (présence de lacets toriques). L'algorithme tente de plonger la composante dans l'espace euclidien classique : s'il y parvient, cela signifie que la composante est un grain ; sinon, cela signifie que la composante possède une caractéristique non compatible avec l'espace euclidien classique (un lacet n'appartenant pas à la classe d'équivalence du point).
Le déroulement de l'algorithme est le suivant : un point de la composante est considéré comme l'origine des coordonnées. Ensuite, tous les points de la composante qui sont voisins de l'origine se voient attribuer des coordonnées en fonction de leur position par rapport à l'origine. Enfin, en parcourant tous les points de voisin en voisin, on étiquette, avec des coordonnées, tous les points de la composante : au final, si deux points voisins dans l'espace torique ont des étiquettes de coordonnées qui ne peuvent être voisines dans l'espace classique, alors la composante possède un lacet n'appartenant pas à la classe d'équivalence du point.



Dans l'image ci-contre, l'algorithme a détecté un lacet torique (en noir) dans la composante bleue, et rien dans la composante rouge.

JOHN CHAUSSARD GILLES BERTRAND
MICHEL COUPRIE DOMINIQUE BERNARD